Université de Haute-Alsace
2022/2023
Maths Renfort CPB2
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 3 : Intégration numérique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Le but de ce chapitre est de voir comment calculer numériquement l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle (fini) $[a, b]$. Le calcul analytique "à la main" est possible pour un nombre limité de fonctions, et souvent ce calcul est long, pénible et compliqué. Parfois, on ne peut même pas trouve de primitive, comme pour la fonction $x \longmapsto \exp(-x^2)$ par exemple. C'est pourquoi il est nécessaire de disposer de méthodes numériques pour approximer des valeurs d'intégrales. On verra principalement de méthodes dites de Newton-Côtes.

Le principe général est de choisir une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a, b]$ et de calculer l'intégrale sur chaque petit domaine, puis d'utiliser la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

On sait très bien intégrer des polynômes, donc sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on va remplacer f par un polynôme P_i facile à intégrer. On va voir deux méthodes :

- $\deg(P_i) = 0 \Longrightarrow P_i(x) = \text{constante}$: **méthode des rectangles et du point milieu** ;
- $\deg(P_i) = 1 \Longrightarrow P_i(x) = \alpha x + \beta$: **méthode des trapèzes**.

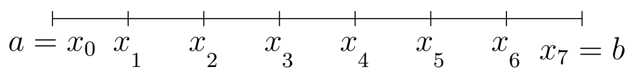
1 Méthode des rectangles

1.1 Principe

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ à intégrer. On prend une subdivision régulière

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

On a $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$. Voici un exemple de subdivision régulière de $[a, b]$ à 7 pas :



La méthode des rectangles consiste à approximer f par un polynôme constant égal à $f(x_i)$ sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. On obtient donc des rectangles (voir Fig. 1).

Sur $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit $P_i(x) = f(x_i)$.
Notons I l'intégrale exacte sur $[a, b]$, $\tilde{I}$ l'intégrale approchée sur $[a, b]$, I_i l'intégrale exacte sur $[x_i, x_{i+1}]$ et $\tilde{I}_i$ l'intégrale approchée sur $[x_i, x_{i+1}]$. On a donc :

$$I = \int_a^b f(x)dx; \quad I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx, \quad \tilde{I}_i = f(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

On déduit donc :

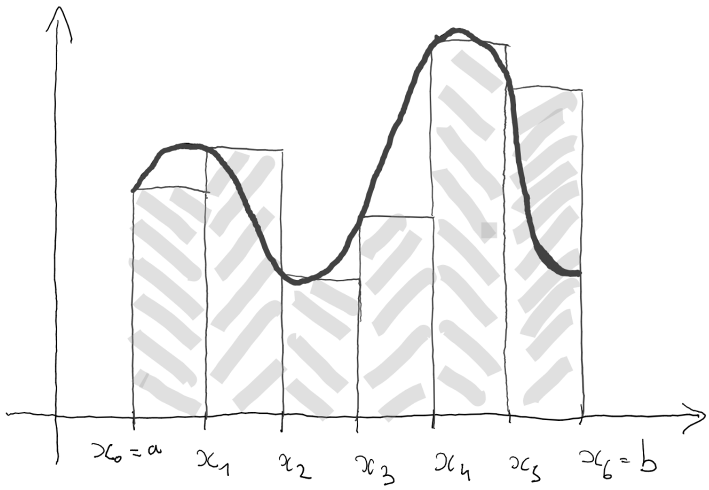


Figure 1 – Illustration de la méthode des rectangles

$$
\begin{aligned}
\tilde{I} &= \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{I}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).
\end{aligned}
$$

Pour des exemples, allez voir la feuille de TD correspondante.

1.2 Calcul d'erreur

Quelle est l'erreur effectuée en appliquant cette méthode ?

Proposition 1

Notons $\epsilon_i = I_i - \tilde{I}_i$. Alors :

$$\exists \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \text{ tel que } \epsilon_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} f'(\xi_i) = \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(\xi_i) = \frac{h^2}{2} f'(\xi_i).$$

Ainsi,

$$|\epsilon_i| \leq \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |f'| = \frac{h^2}{2} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |f'|.$$

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, il existe $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) f'(\xi_i).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\epsilon_i = I_i - \tilde{I}_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x) - f(x_i)\right) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\, f'(\xi_i) dx \\ &= f'(\xi_i) \int_0^{x_{i+1}-x_i} x dx \\ &= \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} f'(\xi_i).\end{aligned}$$

□

L'erreur totale $\epsilon = I - \tilde{I}$ est la somme de toutes les erreurs :

$$\epsilon = \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i = \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i).$$

Ainsi,

$$|\epsilon| \leq \frac{h^2}{2} n \sup_{[a,b]} |f'| = \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{[a,b]} |f'|.$$

Remarques :

- Plus le nombre de points est grand, plus la méthode est précise (erreur petite) ;
- Cette méthode est exacte pour les fonctions constantes ($f' = 0 \Longrightarrow \epsilon = 0$) ;
- La méthode est d'autant plus efficace que les variations de f sont faibles ($|f'|$ petit) ;
- On a choisi comme constante la valeur "à gauche" de l'intervalle $f(x_i)$, on aurait très bien pu prendre la valeur "à droite" $f(x_{i+1})$ et adapter les calculs.

2 Méthode du point milieu

2.1 Principe

Cette méthode utilise aussi des polynômes constants pour approximer la fonction f à intégrer, mais exploite mieux les symétries du problème en prenant pour valeur celle au milieu de chaque intervalle. On prend encore une subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

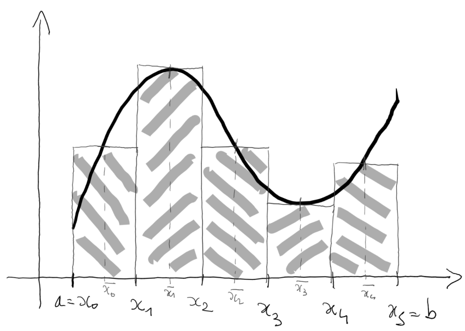


Figure 2 – Illustration de la méthode du point milieu

On pose $\bar{x_i} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit donc $P_i(x) = f(\bar{x_i})$. On a donc (avec les mêmes notations que dans la partie précédente) :

$$\tilde{I}_i = f(\bar{x_i})(x_{i+1} - x_i).$$

et :

$$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{I}_i = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x_i}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x_i}).$$

2.2 Calcul d'erreur

On a un résultat similaire à celui de la partie précédente :

Proposition 2

Notons $\epsilon_i = I_i - \tilde{I}_i$. Alors :

$$\exists \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \text{ tel que } \epsilon_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{24} f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24} f''(\xi_i).$$

Ainsi,

$$|\epsilon_i| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |f''| = \frac{h^3}{24} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |f''|.$$

Démonstration. La preuve est très semblable à celle de la proposition de la section précédente. On utilise le théorème des accroissements finis à l'ordre 2 : pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, il existe $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que

$$f(x) = f(\bar{x_i}) + (x - \bar{x_i}) f'(\bar{x_i}) + (x - \bar{x_i})^2 \frac{f''(\xi_i)}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\epsilon_i = I_i - \tilde{I}_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\bar{x_i}))\, dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((x - \bar{x_i})\, f'(\bar{x_i}) + (x - \bar{x_i})^2 \frac{f''(\xi_i)}{2} \right) dx \\
&= f'(\bar{x_i}) \int_{-\bar{x_i}}^{\bar{x_i}} x dx + \frac{f''(\xi_i)}{2} \int_{-\bar{x_i}}^{\bar{x_i}} x^2 dx \\
&= 0 + \frac{f''(\xi_i)}{3} \bar{x_i}^3 = \frac{f''(\xi_i)}{3} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^3 = \frac{h^3}{24} f''(\xi_i).
\end{aligned}$$

□

L'erreur totale ϵ est la somme de toutes les erreurs :

$$\epsilon = \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i).$$

D'où :

$$|\epsilon| \leq \frac{h^3}{24} n \sup_{[a,b]} |f''| = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

Remarques :

- Cette méthode est exacte pour les fonctions constantes et pour les fonctions affines ($f'' = 0 \Longrightarrow \epsilon = 0$) ;
- L'erreur décroît en n^2, la méthode est donc plus précise que celle des rectangles. Elle est d'autant plus précise que les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ sont petits.

3 Méthode des trapèzes

Pour cette méthode, on choisit les polynômes d'interpolation de degré 1.

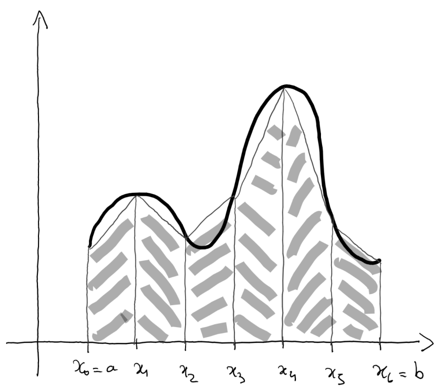
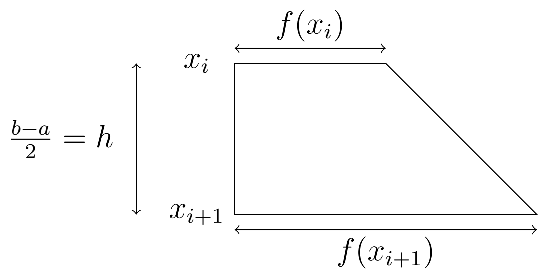


FIGURE 3 – Illustration de la méthode des trapèzes

On prend toujours une subdivision (x_i) régulière. Sur $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit

$$P_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\left(x - \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right).$$

Vous pouvez vérifier que la formule ci-dessus donne bien une droite passant par les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Comme on le voit sur la figure 3, on obtient les trapèzes suivants, d'aire $\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h$:



Ainsi,

$$\tilde{I}_i = (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}h.$$

On obtient donc :

$$
\begin{aligned}
\tilde{I} &= \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{I}_i \\
&= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1} + f(x_i)) \\
&= \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1} + f(x_i)) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2} \right).
\end{aligned}
$$

3.1 Calcul d'erreur

La preuve de cette proposition est très proche des deux qu'on a déjà faites, on ne la fait donc pas. Ceux qui veulent essayer de la faire à titre d'exercice peuvent s'y atteler.

Proposition 3

Notons $\epsilon_i = I_i - \tilde{I}_i$. Alors :

$$\exists \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \text{ tel que } \epsilon_i = -\frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{12} f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_i).$$

Ainsi,

$$|\epsilon_i| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |f''| = \frac{h^3}{12} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |f''|.$$

L'erreur totale est la somme de toutes les erreurs. En procédant comme habituellement, on trouve

$$\epsilon = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

et donc

$$|\epsilon| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

Remarque : cette méthode est équivalente à celle du point milieu, mais deux fois plus lente (il y a deux fois plus de calculs).

TD 4 : Intégration numérique

Exercice 1

On considère

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

. On souhaite obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$. On considère la subdivision $1 < 4/3 < 5/3 < 2$.

1. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ en utilisant la méthode des rectangles ;
2. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ en utilisant la méthode du point milieu ;
3. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ en utilisant la méthode des trapèzes ;
4. Avec la méthode des trapèzes, quelle valeur de n choisir pour la subdivision de sorte à avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ?

Exercice 2

Calculer

$$\int_2^3 e^{-x^2} dx,$$

en utilisant les 3 méthodes du cours et une subdivision à 3 pas. Évaluer l'erreur à chaque fois. Que peut-on dire ?

Exercice 3

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Évaluer

$$\int_0^y x^3$$

avec les trois méthodes et estimer l'erreur à chaque fois. On prendra une subdivision régulière à n pas.
Indication 1 : Montrer par récurrence que

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

Indication 2 : On admet ensuite que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2i+1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$